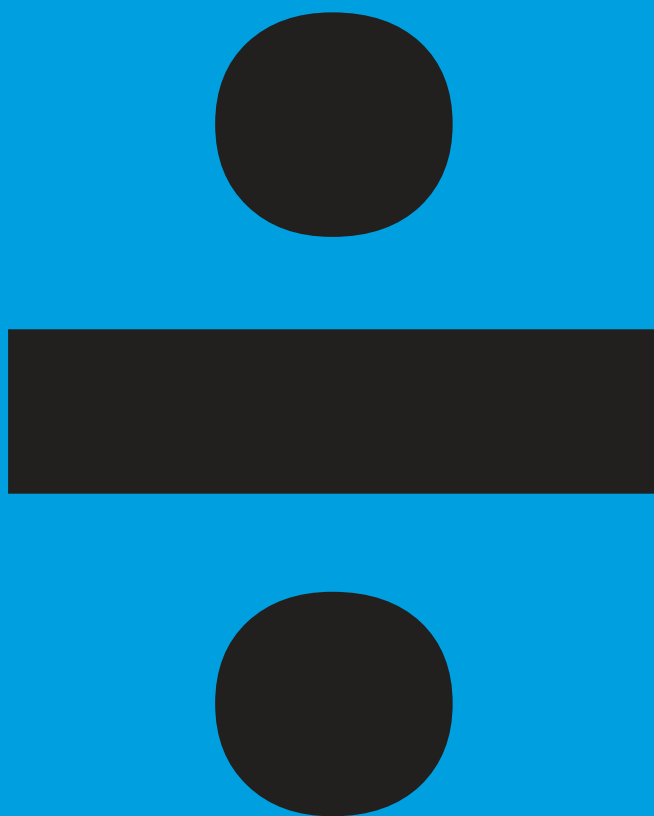


REKENEN + WISKUNDE

UITGELEGD

PETER ALE
MARTINE VAN SCHAİK



KENNISBASIS VOOR
LEERKRACHTEN BASISONDERWIJS

uitgeverij
coutinho

800 OEFENOPGAVEN
MET UITWERKINGEN
→ COUTINHO.NL/RWU3

Rekenen en wiskunde uitgelegd

www.coutinho.nl/rwu3

Met de code in dit boek heb je toegang tot je online studiemateriaal. Dit materiaal bestaat uit aanvullende teksten, interactieve oefeningen en uitwerkingen van de opdrachten uit het boek.

Om je studiemateriaal te activeren heb je onderstaande code nodig. Ga naar www.coutinho.nl/rwu3 en volg de instructies.

Rekenen en wiskunde uitgelegd

Kennisbasis voor leerkrachten basisonderwijs

Peter Ale

Martine van Schaik

Derde, herziene druk

uitgeverij | C
coutinho

bussum 2022

© 2011/2018 Uitgeverij Coutinho bv

Alle rechten voorbehouden.

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van 1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voor zover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16h Auteurswet 1912 dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Reprorecht (www.reprorecht.nl). Voor de readerregeling kan men zich wenden tot Stichting UvO (Uitgeversorganisatie voor Onderwijslicenties, www.stichting-uvo.nl). Voor het gebruik van auteursrechtelijk beschermd materiaal in knipselkranten dient men contact op te nemen met Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, www.stichting-pro.nl).

Eerste druk 2011

Derde, herziene druk 2018, derde oplage 2022

Uitgeverij Coutinho

Postbus 333

1400 AH Bussum

info@coutinho.nl

www.coutinho.nl

Omslag: Garlic, Amsterdam

Noot van de uitgever

Wij hebben alle moeite gedaan om rechthebbenden van copyright te achterhalen. Personen of instanties die aanspraak maken op bepaalde rechten, wordt vriendelijk verzocht contact op te nemen met de uitgever.

ISBN 978 90 469 0625 5

NUR 123

Voorwoord

In de afgelopen jaren is het vak rekenen en wiskunde op de pabo steeds meer een onderwerp van gesprek geworden. Vooronderstellingen over het niveau, misverstanden over de naamgeving (kinderen leren toch geen wiskunde?) en terechte ongerustheid domineren het gesprek. Een van de veelgehoorde uitspraken is dat leerkrachten niet meer kunnen rekenen. Met dit boek kan oude kennis van de leerkracht worden opgefrist of kan de pabostudent kennismaken en oefenen met alles wat hij moet weten en kunnen om een goede (reken)leerkracht te worden.

Het boek geeft de mogelijkheid om je te verdiepen in de lesstof, daarmee te oefenen, en vervolgens de onderdelen die je nog niet helemaal beheerst nog eens te bestuderen. Daarnaast biedt het boek oefeningen per domein (rekenonderdelen 'door elkaar'). Om verder te oefenen met de stof zijn er op de website extra oefeningen per rekenonderdeel en proeftoetsen te vinden. Door deze uitgebreide oefen- en leermogelijkheden kun je je met deze uitgave uitstekend voorbereiden op de landelijke kennistoets, bij voorkeur onder begeleiding van een docent en eventueel zelfstandig, afhankelijk van je voorkennis en rekenniveau.

Om eerst met een open vizier naar oplossingen te kunnen zoeken en verschillende mogelijkheden te kunnen bespreken, zijn de uitwerkingen van de opgaven op de website geplaatst. Ook in deze uitwerkingen is aandacht voor verschillende werkwijzen en oplossingsmogelijkheden.

Er zijn oefeningen op basisniveau en op het niveau van de kennistoets, dus elke student kan op het eigen niveau aan het werk.

Alles wat een leerkracht basisonderwijs moet weten om goed rekenonderwijs te verzorgen wordt in dit boek op een rijtje gezet. We stoppen niet bij niveau 1S, maar zijn ervan overtuigd dat een leerkracht eerder het niveau 3S zou moeten hebben. Dit is ook het niveau dat wordt getoetst door de landelijke Kennistoets Rekenen-Wiskunde. Dan pas ben je in staat om opgaven op meerdere manieren en meerdere niveaus uit te rekenen, zodat je alle denkwijzen van leerlingen kunt begrijpen en ook goede vragen kunt stellen om de leerlingen op het juiste spoor te helpen.

De domeinen uit de kerndoelen basisonderwijs vormen de richtlijn voor de inhoud. De beschrijving van de herziene kennisbasis rekenen is als richtsnoer gehanteerd. De relatie met didactiek is op verschillende manieren aanwezig: in tips worden toepassingen voor de praktijk gegeven, in de didactische aanpak van dit boek wordt consequent de opbouw context, model en formele aanpak gebruikt. Ten slotte worden in de opgaven enkele voorbeelden van

uitwerkingen van leerlingen gebruikt om de koppeling tussen theorie en praktijk te oefenen.

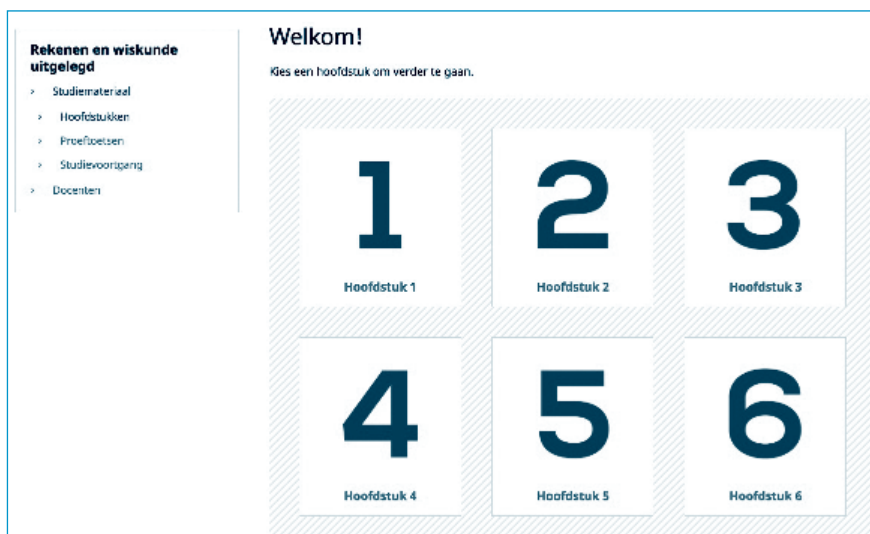
Met dit boek wordt een volledige dekking gegeven van de reken-wiskundige en didactische inhoud van de kennisbasis inclusief de herijking van 2018. Na elk hoofdstuk volgen 50 opgaven op verschillende niveaus (basisvaardigheden, repertoire en landelijke kennisbasis). Dit boek bevat dus 250 opgaven. Op de website www.coutinho.nl/rwu3 (//) staan de uitwerkingen van de opgaven uit dit boek. Bovendien staan hier meer dan 400 extra oefenopgaven op alle drie de niveaus en een overzicht van te bestuderen onderwerpen voor de landelijke Kennistoets Rekenen-Wiskunde. Daarnaast bevat de site aanvullende wiskundestof, die geschikt is voor verdere oefening en in aangepaste vorm ook kan worden ingezet als extra materiaal voor de leerlingen.

Peter Ale & Martine van Schaik
Amsterdam, april 2018

Webondersteuning

www.coutinho.nl/rwu3

Bij dit boek hoort een website met extra materiaal. Hierop vind je de uitwerkingen van de opgaven die bij ieder hoofdstuk behoren (opgaven basisvaardigheden, repertoire en kennisbasis). Op de website staat een grote hoeveelheid opgaven op alle drie de niveaus. Ook vind je er extra reken- en wiskundestof die je als oefening kunt gebruiken of in je lessen kunt inzetten.



Inhoudsopgave

	Inleiding	11
1	Hele getallen	17
1.1	Samenvatting	17
1.2	Basisvaardigheden	17
1.2.1	Talstelsels	17
1.2.2	Contexten en modellen	21
1.2.3	Eigenschappen van de bewerkingen	29
1.2.4	Kenmerken van deelbaarheid	37
1.2.5	Volgorde van de bewerkingen	39
1.2.6	Cijferen en schatten	40
1.2.7	De rekenmachine	48
1.3	Repertoire	51
1.3.1	Talstelsels	51
1.3.2	Driehoeks- en vierkantsgetallen	66
1.3.3	Rekenregels voor machten en wortels	70
1.3.4	Deelbaarheid door 3 en 9	70
1.3.5	Worteltrekken	72
1.3.6	Rekenen met wortels	74
1.3.7	Priemgetallen	76
1.3.8	Faculteit en combinatoriek	77
1.3.9	Negatieve getallen	82
1.3.10	Rijen en reeksen	83
1.3.11	Ontbinden in factoren	85
1.3.12	Vergelijkingen	90
1.3.13	Driehoek van Pascal	93
1.3.14	Merkwaardige producten	97
1.3.15	Grote getallen en de wetenschappelijke notatie	98
 1.4	Oefeningen	101
1.4.1	Basis	101
1.4.2	Repertoire	104
1.4.3	Landelijke kennisbasis	109

2	Verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen	113
2.1	Samenvatting	113
2.2	Basisvaardigheden	113
2.2.1	Verhoudingen	114
2.2.2	Procenten	121
2.2.3	Breuken	129
2.2.4	Kommagetallen	134
2.2.5	Afronden	136
2.2.6	Het (rekenkundige) gemiddelde	138
2.3	Repertoire	139
2.3.1	Procenten en procentpunten	139
2.3.2	Samengestelde interest	140
2.3.3	Van repetent naar breuk	142
2.3.4	Hellingshoek	143
2.3.5	Promille	144
2.3.6	Kansberekening	145
// 2.4	Oefeningen	148
2.4.1	Basis	148
2.4.2	Repertoire	151
2.4.3	Landelijke kennisbasis	153
3	Metten	157
3.1	Samenvatting	157
3.2	Basisvaardigheden	157
3.2.1	Het metrieke stelsel	159
3.2.2	Tijd en temperatuur meten	165
3.2.3	Standaardmaten	167
3.2.4	Hoeken	170
3.2.5	Omtrek, oppervlakte en inhoud	171
3.3	Repertoire	184
3.3.1	De stelling van Pythagoras	184
3.3.2	Metten in andere situaties	187
// 3.4	Oefeningen	189
3.4.1	Basis	189
3.4.2	Repertoire	194
3.4.3	Landelijke kennisbasis	198

4	Meetkunde	203
4.1	Samenvatting	203
4.2	Basisvaardigheden	203
4.2.1	Lijnen, hoeken en vormen	204
4.2.2	Projecteren en viseren	216
4.2.3	Lokaliseren en oriënteren	218
4.2.4	Transformeren, spiegelen en symmetrie	220
4.2.5	Construeren	226
4.2.6	Visualiseren en representeren	230
4.2.7	Redeneren	233
4.3	Repertoire	236
4.3.1	Bijzondere veelvlakken	236
4.3.2	Coördinaten	237
// 4.4	Oefeningen	239
4.4.1	Basis	239
4.4.2	Repertoire	244
4.4.3	Landelijke kennisbasis	249
5	Verbanden	255
5.1	Samenvatting	255
5.2	Basisvaardigheden	255
5.2.1	Verschillende soorten grafieken	255
5.2.2	Centrummaten	262
5.3	Repertoire	264
5.3.1	Percentielen	264
5.3.2	Discrete en continue data	268
5.3.3	Functies en hun grafiek	270
5.3.4	Meer diagrammen	275
5.3.5	Meetschalen	291
5.3.6	Cito en PPON	295
5.3.7	Normale verdeling	299
5.3.8	Lineair versus evenredig verband	300
// 5.4	Oefeningen	303
5.4.1	Basis	303
5.4.2	Repertoire	307
5.4.3	Landelijke kennisbasis	321

6	Verstrengeling	331
6.1	Samenvatting	331
6.2	Basisvaardigheden	332
6.2.1	Rekenen in andere vakken	332
6.2.2	Rekenen in het dagelijks leven	335
6.2.3	Een rekenprobleem oplossen	336
6.3	Repertoire	339
6.3.1	Voetbalplaatjes	339
6.3.2	Schalen	340
6.3.3	Formule voor samengestelde interest	340
6.3.4	Chloor in zwemwater	341
6.3.5	De lampjes in de mast van IJsselstein	341
6.3.6	De kortste afstand	342
6.4	Project – Kamperen in Parijs	343
	Illustratieverantwoording	351
	Bibliografie	353
	Register	355
	Over de auteurs	365

Inleiding

Waarom dit boek?

Het verzorgen van rekenonderwijs op de basisschool is moeilijker dan veel leerkrachten zich realiseren. Het vraagt meer dan opdrachten zelf kunnen maken. Ook red je het niet met het aanleren van alleen de didactiek, want goed lesgeven zonder zelf voldoende rekenvaardig te zijn is onmogelijk. Dit boek is bestemd voor leerkrachten in het basisonderwijs en aankomende leerkrachten (pabostudenten). Het doel is de rekenvaardigheid die nodig is om als leerkracht op de basisschool goed te functioneren aan te leren en te verdiepen, zodat je weet waar je les over geeft.

Wat is rekenvaardig? Hiervoor is niet een algemeen geldende definitie te geven. Het hangt ervan af welk niveau van beheersing nodig is. Iemand die alleen rekent voor dagelijkse zaken als het doen van boodschappen, het kopen van behang of vloerbedekking en het bijhouden van een dieettabel is voor zichzelf al snel rekenvaardig genoeg. Wie veel bezig is met percentages, gemiddelden en groeicurven moet meer kunnen. Als je ook nog pretendeert het rekenen aan anderen uit te kunnen leggen, dan is er nog meer nodig. Dan moet je niet alleen kunnen rekenen, maar ook op meerdere manieren en op verschillende niveaus. Dit is nodig om (foute) redeneringen van anderen te kunnen analyseren en te kunnen voorzien van goede reacties en impulsen ter verbetering, zoals het stellen van juiste vragen. Meerdere oplossingsmanieren kennen is voor leerkrachten cruciaal.

Uit onderzoek is gebleken dat veel hulp die leerkrachten geven neerkomt op het aanleren van de methode die de leerkracht zelf beheerst. Een opgave als $48 \times 37,5$ kan uitgerekend worden door middel van de tussenstap 12×150 . Dat $4800 \times \frac{3}{8}$ ook een prima tussenstap is, is niet voor iedere leerkracht meteen inzichtelijk, terwijl een leerling die meer affiniteit met procenten en breuken heeft deze weg best kan kiezen. Als die leerling daarna een rekenfout maakt en de leerkracht reageert met 'dat moet je zo doen' en vervolgens zijn eigen aanpak laat zien, dan helpt de leerkracht deze leerling niet verder met zijn oplossing. Op deze manier wordt er niet aangesloten bij de rekenstrategie van de leerling en wordt hij niet goed geholpen om rekenen te leren. Hij leert alleen wat de leerkracht weet, in plaats van dat de leerkracht de leerling

begeleidt op basis van de vraag. Bovendien kan de leerling de indruk krijgen dat zijn manier fout is, terwijl dat niet zo is.

Goed kunnen rekenen is pas het begin van goed kunnen uitleggen. In dit boek wordt niet ingegaan op wat uitleggen is. Dat gebeurt in ons didactiekboek *Rekenen-wiskunde en didactiek* (Ale & Van Schaik, 2017). Wel zal vaak bij de beschrijving van een model of werkwijze ook een school- of leerlingperspectief worden gegeven en geregeld zal een link gelegd worden naar de praktijk van het basisonderwijs door tips en hints te geven bij de bespreking van rekenkundige onderdelen.

Een overtuiging die studenten (en leerkrachten) vaak met zich meedragen is dat ze ‘toch niet kunnen rekenen’. Vooral wiskundedocenten winden zich op over de trots waarmee sommige mensen kunnen beweren dat wiskunde niets voor hen is. Een bijdrage op de website van *Psychologie Magazine* (juli 2010) gaat nog verder: ‘Toen ben ik voor het eerst van mijn leven gestopt met een opleiding en gestopt met verbergen dat ik niet kan rekenen. Ik vraag nu een ander iets voor mij uit te rekenen en vertel daarbij dat ik zo’n hersenkwabje mis. Wat een ruimte en wat een rust, er zijn heel veel rekenkundige wondermensen om mij heen. Ik hoef nooit meer te rekenen!’

Een leerkracht in het basisonderwijs kan zich deze houding niet permitteren. Een leerkracht in het basisonderwijs wil goed kunnen rekenen en vindt rekenen leuk, fijn en plezierig, en wil dat ook overbrengen op zijn leerlingen.

Ordelijkheid, netheid en structuur zijn basisvoorwaarden om goed te leren (en te kunnen) rekenen. De fouten die gemaakt worden doordat getallen niet netjes onder elkaar staan zijn niet nodig, maar komen wel vaak voor. Denken in structuren in plaats van in het onthouden van regels is voor de meeste rekenaars een middel om rekenproblemen, uitdagende opgaven, flexibel aan te kunnen pakken.

Verder dan groep 8

Dit boek gaat verder dan het curriculum van groep 8 (referentieniveau 1S). Uit het voorgaande mag de conclusie getrokken worden dat een leerkracht ver boven de stof hoort te staan. Drie redenen:

- Om iets uit te kunnen leggen moet de leerkracht alle opgaven zonder problemen kunnen maken.

- Om iets goed uit te kunnen leggen moet de leerkracht alle (leer)lijnen doorzien. Daarom gaat vooral het hoofdstuk ‘Hele getallen’ zeer gedetailleerd in op de achtergrond van de hoofdbewerkingen.
- Een leerkracht mag niet in paniek raken als een leerling met onverwachte oplossingen komt, of een vraag stelt die niet in het boek staat (150 bees-ten hebben samen 400 poten, het zijn koeien en kippen. Hoeveel koeien en kippen zijn dat?). Hij moet flexibel zijn in het omgaan met de wiskun- dige inhoud en oplossingen.

Alle elementen uit de Kerndoelen rekenen/wiskunde (SLO, 2006), de *Ken- nisbasis Rekenen-Wiskunde voor de lerarenopleiding basisonderwijs* (Boersma e.a., 2018), de daarbij behorende *Toetsgids* en *Handreiking Rekenen-wiskunde* hebben in dit boek een plaats gekregen. Het gaat om:

- Wiskundig inzicht en handelen:
 - 1 De leerlingen leren wiskundetaal gebruiken.
 - 2 De leerlingen leren praktische en formele rekenwiskundige problemen op te lossen en redeneringen helder weer te geven.
 - 3 De leerlingen leren hun aanpak bij het oplossen van rekenwiskundige problemen te onderbouwen en leren oplossingen te beoordelen.
- Getallen en bewerkingen:
 - 1 De leerlingen leren structuur en samenhang van aantallen, gehele getallen, kommagetallen, breuken, procenten en verhoudingen op hoofdlijnen te doorzien en er in praktische situaties mee te rekenen.
 - 2 De leerlingen leren de basisbewerkingen met gehele getallen in elk geval tot 100 snel uit het hoofd uit te voeren, waarbij optellen en af- trekken tot 20 en de tafels van buiten gekend zijn.
 - 3 De leerlingen leren schattend tellen en rekenen.
 - 4 De leerlingen leren handig optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.
 - 5 De leerlingen leren schriftelijk optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen volgens meer of minder verkorte standaardprocedures.
 - 6 De leerlingen leren de rekenmachine met inzicht te gebruiken.
- Meten en meetkunde:
 - 1 De leerlingen leren eenvoudige meetkundige problemen op te lossen.
 - 2 De leerlingen leren meten en leren te rekenen met eenheden en ma- ten, zoals bij tijd, geld, lengte, omtrek, oppervlakte, inhoud, gewicht, snelheid en temperatuur.

(Zie ook: www.slo.nl/primair/kerndoelen.)

Naar aanleiding van de herijking van de kennisbasis 2017/2018 zijn, vergeleken met de vorige druk, de volgende onderwerpen toegevoegd of hebben meer aandacht gekregen:

- 1 radixnotatie;
- 2 procentpunten;
- 3 rekenen met wortels;
- 4 het kwantificeren van subjectieve gegevens;
- 5 de betekenis van grootheid – eenheid – maat;
- 6 vergrotingsfactor;
- 7 coördinaten;
- 8 transleren;
- 9 congruentie en gelijkvormigheid;
- 10 doorsneden in de meetkunde;
- 11 infographics;
- 12 twee vergelijkingen met twee onbekenden;
- 13 verschillende typen van functies;
- 14 boxplot;
- 15 causaliteit en significantie.

Structuur van het boek

Dit boek volgt inhoudelijk de structuur van de *Kennisbasis Wiskunde Lerarenopleiding basisonderwijs* (Boersma e.a., 2018). In de kennisbasis wordt onderscheid gemaakt tussen:

- kennis van rekenen-wiskunde;
- specifieke rekenwiskundige kennis van de basisschoolleraar;
- kennis van maatschappelijke relevantie en vervlechting van rekenen-wiskunde.

In dit boek komen alle drie de soorten kennis aan bod. In de opgaven is aandacht voor het beoordelen van oplossingen van leerlingen. Het echt analyseren van leerlingenwerk en daar conclusies aan verbinden valt buiten het bereik van dit boek. Om goed te kunnen analyseren is de wiskundige kennis uit dit boek wel noodzakelijk.

Er wordt gewerkt naar een hoger niveau dan 3S van de 'Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen' – ook wel 'Commissie Meijerink' (Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen, 2008). Dit wordt gerealiseerd in het onderdeel 'Repertoire'. Het onderdeel 'Basisvaardigheden' van elk hoofdstuk bereidt voor op niveau 3S.



Hier vind je verwijzingen naar informatie op internet. Deze informatie is bedoeld als aanvulling of verdieping van de behandelde onderwerpen.

tip

Door het boek heen zijn tips opgenomen, die aan de leerkracht handvatten bieden om de stof bij de leerling onder de aandacht te brengen.

De hoofdstukken behandelen achtereenvolgens:

- hele getallen;
- verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen;
- meten;
- meetkunde;
- verbanden;
- verstrengeling.

Per hoofdstuk wordt de volgende structuur gehanteerd:

- samenvatting;
- basisvaardigheden;
- repertoire;
- opgaven op twee niveaus (basisvaardigheden en repertoire);
- opgaven conform de landelijke Kennistoets Rekenen-Wiskunde.

Onder repertoire wordt verstaan wat een leerkracht moet weten, maar wat niet altijd in de leerlingboekjes staat. Het gaat dan om:

- machten, wortels, priemgetallen, andere talstelsels en negatieve getallen;
- rijen;
- ontbinden in factoren (grootste gemene deler/kleinste gemene veelvoud);
- lijnen en grafieken;
- vergelijkingen;
- coördinaten;
- hoeken;
- driehoek van Pascal;
- kansberekening;
- formules;
- stelling van Pythagoras;
- bewijzen, formules afleiden.

Deze aspecten komen aan de orde als het behandelde leerstofdomein zich daartoe leent. Wortels kunnen bijvoorbeeld bij hele getallen een rol spelen ($\sqrt{16}$), maar ook bij kommagetallen ($\sqrt{30,25}$) en bij meetkunde (de lengte van de schuine zijde als de rechthoekszijden 5 en 6 zijn).

Uitgangspunten om te leren rekenen

Voorwaarde om goed te kunnen rekenen is het beheersen van een aantal basisvaardigheden. Hoewel deze voor de hand lijken te liggen, sommen we ze hier op:

- 1 getalbegrip en hoeveelheidsbegrip (je iets kunnen voorstellen bij getallen);
- 2 optellen en aftrekken tot 100 geautomatiseerd;
- 3 vermenigvuldig- en deeltafels geautomatiseerd.

Als deze basis niet aanwezig is, zal daar voortdurend, en liefst van tevoren, aan moeten worden gewerkt. Er is nog een vierde basiselement nodig:

- 4 een niveau van logisch denken, waarbij de rekenaar los kan komen van het hier en het nu, van het directe moment en de concrete situatie.

Het niveau van logisch denken zal bij het verder bekwamen in rekenen steeds hoger worden. Probleemoplossend en wiskundig redeneren helpen daarbij.



Oefen je basisvaardigheden op internet of via apps.

tip1

Basisvaardigheden kunnen uitgebreid op internet of via apps geoefend worden. Voorbeelden van sites zijn www.rekentuin.nl, www.rekenweb.nl en www.rekenbeter.nl. Kijk voor meer links op www.coutinho.nl/rwu3.

In de methoden op de basisschool leren de leerlingen het rekenen via contexten, modellen en daarna de formele opgave. De manier waarop dit toegepast wordt hangt af van de methode. In dit boek is steeds aandacht voor welke contexten en modellen zinvol zijn bij een bepaalde wiskundige activiteit. Uitgangspunt is dat een context een situatie is gebaseerd op een onderliggend model met als doel het oplossen te ondersteunen. Bij het bedenken van een context begint de leerkracht daarom altijd met het model. Op grond daarvan kan een relevante situatie gecreëerd worden.

Dit boek geeft de basis om goed les te kunnen geven. Het is de 'kennis voor het lesgeven', zoals dat heet in *Voetstuk van de Pabo* (Van Zanten e.a., 2009). Om deze kennis te beheersen is oefening op drie niveaus nodig: context, model en formele opgave. Het is daarom belangrijk dat de lezer zo veel mogelijk elke opgave op deze drie niveaus oplost en waar mogelijk ook steeds kijkt of er bij de formele oplossing sprake kan zijn van handig rekenen. Een selectie van de opgaven bevindt zich achter elk hoofdstuk in het boek. Overige opgaven en alle uitwerkingen staan op www.coutinho.nl/rwu3.



Met dit icoontje wordt verwezen naar de paragraaf waarin het betreffende onderwerp wordt besproken.

1

Hele getallen

1.1 Samenvatting

In dit hoofdstuk komen alle rekenkundige activiteiten aan de orde die met hele getallen uit te voeren zijn. Alle bewerkingen inclusief machten, worteltrekken en faculteit worden behandeld. Verder is er aandacht voor rijen en vergelijkingen. De basis vormen contexten en modellen die ten grondslag liggen aan de bewerkingen. Er worden geen recepten gegeven, maar de leerlijn van context via model naar formele opgave wordt zo veel mogelijk gevolgd.

1.2 Basisvaardigheden

1.2.1 Talstelsels

Om hoeveelheden op te kunnen schrijven en ermee te kunnen rekenen is een systeem nodig dat door iedereen begrepen en gehanteerd kan worden. Zo'n systeem heet een talstelsel. Toen men vroeger nog in kleine hoeveelheden dacht, waren allerlei turfsystemen afdoende. Vier streepjes met een streepje erdoorheen is vijf.

De Romeinen gebruikten een systeem dat uit enkele symbolen bestond. Elk symbool had zijn eigen waarde:

$$I = 1$$

$$V = 5$$

$$X = 10$$

$$L = 50$$

$$C = 100$$

$$D = 500$$

$$M = 1000$$

tip2

Besteed tijdens de les aandacht aan de geschiedenis van ons talstelsel en de rol die culturen op andere continenten hierbij hebben gespeeld.

Leestip: Bellos, A. (2010). *Getallen ontraadseld*. Utrecht: Kosmos uitgevers B.V.

Met een aantal simpele regels kon men hoeveelheden symboliseren. Met behulp van een eenvoudig rekenhulpmiddel, de Romeinse **abacus**, kon men er zelfs mee rekenen.

De regels waren:

- Een symbool gevolgd door een symbool voor een even groot of kleiner getal betekent dat de waarden van beide symbolen bij elkaar opgeteld moeten worden. Dus $XX = 10 + 10 = 20$ en $XIII = 13$.
- Een symbool gevolgd door een symbool met een grotere waarde betekent dat het kleinste van het grootste symbool moet worden afgetrokken. IX betekent dan: $10 - 1 = 9$.

Dit systeem heet een **additief talstelsel**. Zo'n stelsel heeft belangrijke nadelen: het heeft een beperkt aantal symbolen en het rekenen op een blaadje is erg bewerkelijk. Bijzonder is dat het symbool voor nul niet nodig is.

Toen de maatschappij complexer werd, was een ander talstelsel nodig. Dit werd gaandeweg bijna wereldwijd het decimale **positiestelsel**. De kern van een positiestelsel is dat de waarde van een cijfer niet alleen bepaald wordt door het cijfer zelf, maar ook door de plaats waar dat cijfer in het getal staat. In het decimale (tientallige) stelsel is in het getal 3273 de eerste 3 drieduizend waard, terwijl de laatste 3 'slechts' drie waard is. Hierbij kan een positieschema worden gemaakt.

Duizendtallen	Honderdtallen	Tientallen	Eenheden
3	2	7	3

Nu ontstaat ook de noodzaak tot het invoeren van een symbool voor nul. Als er bijvoorbeeld geen honderdtallen zijn, dan kan die positie niet leeg gelaten worden. Op die plaats komt de nul: 3073.

Duizendtallen	Honderdtallen	Tientallen	Eenheden
3	0	7	3

tip3

Het positiestelsel dat hier besproken wordt, heet het tientallig stelsel. Een goede oefening is om ook eens te rekenen in het achttallig stelsel. Hierdoor ervaar je wat leerlingen meemaken als zij de basis van het rekenen leren. Kijk bijvoorbeeld in *Het land van Okt* (Goffree, 1995).

De basis van ons positiestelsel is het getal 10. Als we dit toevoegen aan de tabel, wordt de relatie tussen de verschillende plaatsen en de 10 zichtbaar.

Duizendtallen	Honderdtallen	Tientallen	Eenheden
10^3	10^2	10^1	10^0
3	2	7	3

10^3 betekent $10 \times 10 \times 10$, 10^2 betekent 10×10 , $10^1 = 10$ en 10^0 is per definitie 1. In hoofdstuk 2 gaan we in op de betekenis van 10^{-1} .



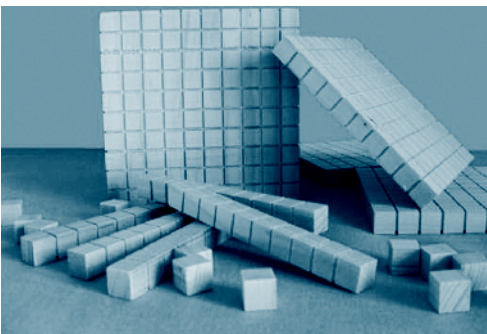
Bekijk de machten van tien in de praktijk.

tip4

Wil je zien wat de machten van 10 betekenen? Kijk eens op www.coutinho.nl/rwu3 en bekijk de Melkweg op 10 miljoen lichtjaar van de aarde. Of probeer het zelf uit met Google Earth, door in en uit te zoomen.

Visualiseren van getallen

Er zijn twee goede manieren om getallen in beeld te brengen. De ene gaat uit van materiaal, bijvoorbeeld blokjes, terwijl de andere gebruikmaakt van een model, zoals de getallenlijn. Een mooie context om het tientallig stelsel in beeld te brengen is het gebruik van geld: 100 euro, 10 euro en 1 euro. Door de verschillende waarden kan het positiestelsel inzichtelijk gemaakt worden.



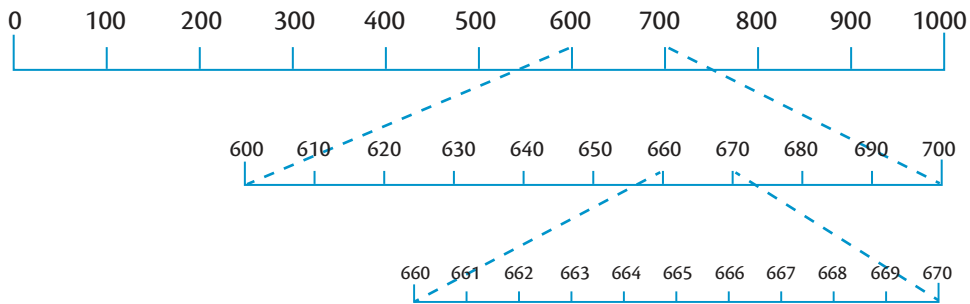
In het basisonderwijs gebruikt men ook wel het zogenoemde **MAB-materiaal** (Multibase Arithmetic Blocks). Dit is een leermiddel waarbij het tientallig stelsel is weergegeven in losse blokjes (eenheden), staafjes van 10 (tientallen), plaatjes van 10×10 (honderdtallen) en kubussen van $10 \times 10 \times 10$ (duizendtallen).

Figuur 1.1 MAB-materiaal

tip5

Door gebruik te maken van materialen en modellen wordt een opgave niet alleen zichtbaar voor de leerling, maar wordt de opgave ook inzichtelijk. Op deze manier krijgt de leerling meer grip op de getallen, of zelfs op de structuur van de getallen en de bewerking. Uiteraard moeten deze hulpmiddelen in een later stadium niet meer nodig zijn. Om leerlingen ervan los te laten komen, kan de stap 'alleen nog aan het hulpmiddel denken' worden gebruikt. Dit wordt **wegdenken** genoemd. De modellen worden 'geestelijk' eigendom van de leerling en helpen hem modelmatig te denken.

De **getallenlijn** is een belangrijk model om inzicht te krijgen in het positiestelsel. Het gaat dan niet alleen om de waarde die een cijfer heeft op basis van de plaats in het getal, maar ook welke plaats een cijfer heeft binnen de verzameling van alle cijfers.



Figuur 1.2 Getallenlijnen van verschillende orde van grootte

De getallenlijnen laten zien dat het getal 667 gezocht moet worden tussen 600 en 700. Dit kan verder ingekaderd worden door eerst te kijken tussen de 660 en 670 en daarna het interval nog te verkleinen naar 665-670. Op deze manier wordt de rekenaar zich bewust van de waarde van de getallen waarmee gerekend wordt.

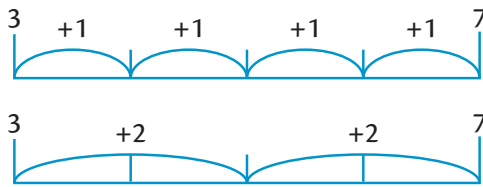
tip6

In veel reken/wiskundemethoden wordt de getallenlijn ingezet bij het maken van opgaven. De getallenlijn kan ondersteunen bij het rekenen. Het is echter al in een eerdere fase een prima hulpmiddel om leerlingen getalbegrip bij te brengen. Kinderen moeten dan bijvoorbeeld getallen op een getallenlijn plaatsen. In de vakdidactiek heet dit positioneren, een belangrijke oefening om inzicht te krijgen in de waarde van getallen.

1.2.2 Contexten en modellen

Een model is een schematische weergave van de achterliggende bedoeling van een bewerking of opgave. Een model is dan ook bedoeld om inzicht te krijgen in de wiskundige handeling of bewerking. Een bewerking is bijvoorbeeld optellen. Een model om inzichtelijk te maken wat er gebeurt bij optellen is de getallenlijn. Een getallenlijn kan een lijn zijn met streepjes met of zonder getallen erbij. Hij kan ook een lege getallenlijn zijn, waarbij de rekenaar zijn eigen strategieën invult.

$$3 + 4 =$$



Figuur 1.3 $3 + 4$ op een getallenlijn

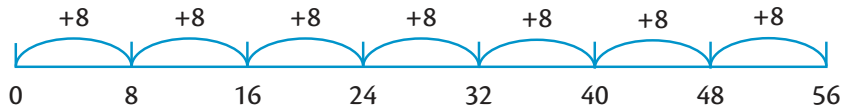
Een context is een betekenisvolle situatie gebaseerd op een (wiskundig) model. Een context is zodanig ontworpen dat het model dat de wiskundige handeling inzichtelijk maakt voor de hand ligt. Bij de opgave '3 erbij 4' zou de context kunnen zijn: Gusta heeft drie jurkjes voor haar pop. Ze krijgt er van haar tante nog vier bij. Een context ontwerpen begint met vast te stellen welk model bij de formele opgave hoort. Als dat bekend is, kan meestal gekozen worden uit een rijke hoeveelheid contexten (situatie ondersteund door model).

Het ontwerpen van een context gaat uit van de bewerking of wiskundige handeling die wordt aangeleerd. Het leren van de leerling begint echter bij de context en komt via het model bij de formele opgave uit.

Rekenen is ontstaan vanuit de behoefte om de praktijk te kunnen beschrijven en te bewerken door middel van rekenkundige processen. Op het moment dat hoeveelheden gehanteerd moeten worden, ontstaat de behoefte aan een systeem. Om dat systeem goed te kunnen beheersen moeten de achterliggende praktische situaties bekend zijn. Het begrip vermenigvuldigen moet betekenis hebben voordat tafels en dergelijke geleerd kunnen worden. Dat

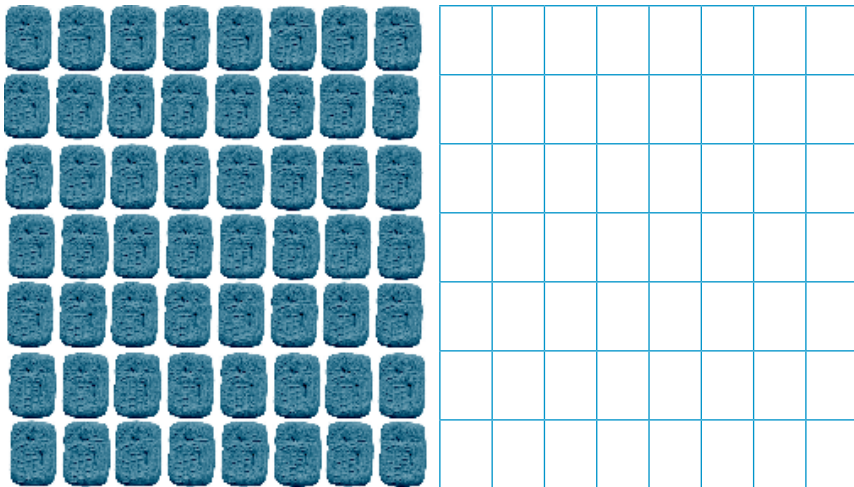
1 Hele getallen

7×8 gelijk is aan 56 kan door de volgende context zichtbaar gemaakt worden: als je zeven uur werkt à € 8,- per uur, dan heb je aan het eind van de dag € 56,- verdiend (uitgeschreven: € 8,- + € 8,- + € 8,- + € 8,- + € 8,- + € 8,- + € 8,- = € 56,-). Het model dat hierbij gebruikt kan worden is de getallenlijn, met achtereenvolgens zeven sprongen van € 8,-.



Figuur 1.4 Getallenlijn bij 7×8

Als je dezelfde opgave wilt beschrijven met een ander model, verandert ook de context. Op grond van het rechthoekmodel is een mogelijke context: op een bakplaat liggen zeven rijen met acht koekjes. Hoeveel koekjes zijn dit?



Figuur 1.5 Context met bijpassend rechthoekmodel

Uit deze twee voorbeelden blijkt dat een context niet zomaar een situatie is, maar dat er een model bij hoort waardoor je de bewerking (nog beter) gaat begrijpen.

Modellen voor de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen

Bewerkingen zijn de rekenkundige activiteiten die met getallen uitgevoerd kunnen worden. De belangrijkste bewerkingen zijn: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

Alle bewerkingen leiden naar een resultaat. Dat wordt voorafgegaan door het **isgelijktteken (=)**.

Dat dit echt 'is gelijk' betekent wordt weleens over het hoofd gezien. De opgave $25 \times 28 = 700$ is correct geformuleerd. Sommige mensen gebruiken om dit doel te bereiken tussenoplossingen:

$$25 \times 28 = 100 \times 28 = 2800 : 4 = 700$$

De gedachtegang is logisch, de notatie is echter wiskundig niet juist. In het algemeen wordt dan gesproken over wiskundig niet correct. Een **wiskundig correcte** weergave is:

$$100 \times 28 = 2800$$

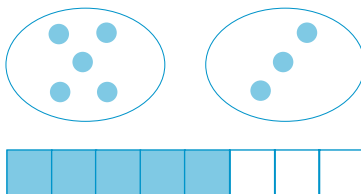
$$2800 : 4 = 700$$

Een andere mogelijkheid is:

$$25 \times 28 = 25 \times 4 \times 28 : 4 = 100 \times 28 : 4 = 2800 : 4 = 700$$

In de eerste aanpak wordt de gedachtegang gesplitst in stappen. Bij de tweede wordt na elk isgelijktteken gezorgd voor een kloppende berekening.

Optellen kan gezien worden als het samenvoegen van twee of meer hoeveelheden. Het sleutelwoord is: samen. De getallen die bij elkaar opgeteld worden heten de **termen** van de optelling. De uitkomst heet de **som**. Een voorbeeld: Ahmed heeft vijf boeken. Zijn zus Aïcha heeft er drie. Hoeveel boeken hebben ze samen? Het model hierbij is dan het zogenoemde groepjesmodel, dat ook door middel van staafjes (of een strook) kan worden weergegeven:



Figuur 1.6 Modellen voor de opgave $5 + 3$

1 Hele getallen

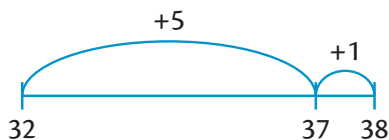
Een model voor het rekenen tot honderd is het **honderdveld**. Het honderdveld kan helemaal ingevuld gebruikt worden, maar een gedeeltelijk ingevuld model levert betere mogelijkheden om te leren en te oefenen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20										
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30										
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40										
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50										
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60										
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70										
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80										
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90										
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100										

Figuur 1.7 Honderdvelden

Door het honderdveld niet helemaal in te vullen kunnen er stappen van 10 gemaakt worden door verticaal te werken. Je kunt beredeneren welke getallen onder de afgedekte velden zitten. Hoeveel zit er tussen het zevende vakje van rij 4 en het vijfde vakje van rij 8? Enzovoort.

Een ander model is de al genoemde getallenlijn, ook wel **lijnmodel** genoemd.



Figuur 1.8 Lege getallenlijn waarop de opgave $32 + 6$ is uitgevoerd

Dit model maakt het mogelijk de denkstappen in beeld te brengen. Ook sluit het beter aan bij de ontwikkeling van de getalwaarden. Daarom verdient de lege getallenlijn vaak de voorkeur boven het honderdveld.

Een situatie waarbij optellen niet meteen duidelijk is te zien, is het uitrekenen van de totale prijs van aankopen in een winkel. Een potlood van € 1,-, een